Consideriamo un filo rettilineo infinito.

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Consideriamo una carica q che è in un campo elettrico; allora la forza generata dal campo elettrico che agisce nella carica è:

$$\vec{F_E} = q \cdot \vec{E}$$

La forza magnetica agisce secondo la formula di Lorentz:

$$\vec{F_B} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

La forza che agisce su un tratto di lunghezza l del filo è:

$$\vec{F_B} = i \cdot \vec{l} \wedge \vec{B}$$

e il modulo è:

$$F_B = |i| \cdot l \cdot B \cdot \sin\theta$$

angolo compreso tra il filo e il campo magnetico

La carica contenuta nel tratto di filo:

$$\Delta Q = \lambda \cdot L$$

Velocità della luce: $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Contrazione delle lunghezze di Lorentz:

$$L' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, L \qquad X = \frac{X' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Trasformazioni di Lorentz:

$$X'(t_0') = \frac{X(t_0) - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad t_0' = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}X(t_0)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y'(t_0') = y(t_0)$$
$$z'(t_0') = z(t_0)$$

Se il sistema Σ' si muove nella direzione opposta a Σ, al numeratore ci è + al posto di −.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & -\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quadrivettore con la trasformazione di Lorentz:

$$x_0' = ct' = \frac{ct - v/c\, x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{x_0 - v/c\, x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \boxed{x_0 = ct}$$

$$x' = \frac{x - v/c\, x_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \ ; \quad y' = y \ ; \quad z' = z$$

Potenziale vettore: $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Potenziale scalare: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\frac{\Phi'}{c} = A_0' \qquad A_0' = \frac{A_0 - v/c\, A_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Trasformazioni dei campi:

$$\begin{cases} E_x'(\underline{x}') = E_x(\underline{x}) \\ E_y'(\underline{x}') = \frac{E_y(\underline{x}) - v B_z(\underline{x})}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ E_z'(\underline{x}') = \frac{E_z(\underline{x}) + v B_y(\underline{x})}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x'(\underline{x}') = B_x(\underline{x}) \\ B_y'(\underline{x}') = \frac{B_y(\underline{x}) + v/c^2\, E_z(\underline{x})}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ B_z'(\underline{x}') = \frac{B_z(\underline{x}) - v/c^2\, E_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

Ovviamente, se la direzione del moto relativo fosse diversa (ad esempio lungo l'asse z) $\vec{v}=(0,0,v)$, in questo caso è la componente z a rimanere invariante. Quindi:

$$\begin{cases} E_{z'}(x') = E_z(x) \\ E_{x'}(x') = \dfrac{E_x(x) - vB_y(x)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ E_{y'}(x') = \dfrac{E_y(x) - vB_x(x)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} B_{z'}(x') = B_z(x) \\ B_{x'}(x') = \dfrac{B_x(x) + v/c^2\, E_y(x)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ B_{y'}(x') = \dfrac{B_y(x) - v/c^2\, E_x(x)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a} \qquad \vec{a}=0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{cost.}$$

Forza di Lorentz

$$\vec{F_L} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$$

Gauge di Lorentz:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

$$\vec{v}\wedge\vec{B} = \begin{cases} v_y B_z - v_z B_y = 0 \\ v_z B_x - v_x B_z = -vB_z \\ v_x B_y - v_y B_x = vB_y \end{cases} \qquad \vec{v} = (v,0,0)$$

Risolvere l'equazione del moto: (part. lentamente accelerate)

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \lambda_0\, q\,(E + v\wedge B)$$

carica

$$\boxed{\frac{d}{dt}\, m_0 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = e(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})}$$

ESEMPIO

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \lambda_0 q \left[\underbrace{(0,0,E_0)}_{E} - \vec{v} \wedge \underbrace{(0,0,B_0)}_{B} \right]$$

Equazioni del moto:

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -e v_y B_0$$

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = e v_x B_0$$

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = e E_0$$

Fotone:

Energia fotone: $E = h\nu$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \; (=\Pi_0) \\ \frac{h\nu}{c} \vec{m} \end{pmatrix}$$

→ versore della velocità

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} P_0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \vec{p} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix}$$

Energia cinetica relativistica:

$$\boxed{P_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \cdot \frac{1}{c}$$

$$\vec{\Pi}_0 = E$$

Lagrangiana: (~~...~~ relativistico) caso non covariante)

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} - e(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

Hamiltoniana (non covariante):

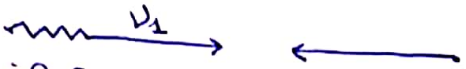
$$h = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + e\phi$$

Se la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo allora l'hamiltoniana è una costante del moto e viceversa:

$$h = cost \iff \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

ESERCIZIO

Consideriamo un fotone di frequenza ν_1 e velocità $(c,0,0)$ che colpisce un elettrone che viaggia in senso contrario con velocità $\vec{v}=(-v,0,0)$, $v>0$



e dopo l'urto il fotone ha velocità $(-c,0,0)$ con frequenza $\nu_2=?$
Determinare ν_2 e la velocità dell'elettrone dopo l'urto $\vec{u}$.

Soluzione

Conservazione del quadrimomento

$$\underline{P}=\underline{Q}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{h\nu_1}{c}+\frac{m_0\cdot c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{h\nu_1}{c}-\frac{m_0\cdot v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0+0 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h\nu_2}{c}+\frac{m_0\cdot c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ -\frac{h\nu_2}{c}+\frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ 0+\frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ 0+\frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=0 \Rightarrow u_y=0 \\ \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=0 \Rightarrow u_z=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}=(u_x,0,0)=(u,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{h\nu_1}{c}+\frac{m_0\cdot c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{h\nu_2}{c}+\frac{m_0 c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ \frac{h\nu_1}{c}-\frac{m_0\cdot c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=-\frac{h\nu_2}{c}+\frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni:

$$\frac{m_0(c+v)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2h\nu_2}{c} + \frac{m_0(c-u)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow m_0 c\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \frac{2h\nu_2}{c} + m_0 c\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}$$

Sommandole:

$$\frac{2h\nu_1}{c} + m_0 c\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = m_0 c\sqrt{\frac{c+u}{c-u}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} = \frac{2h\nu_1}{m_0 c^2} + \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

$\Rightarrow$ si trova la u

Da:

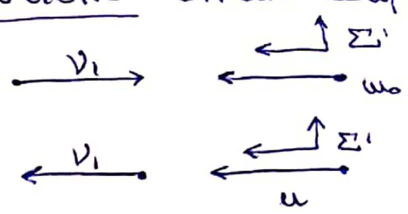
$$m_0\cdot c\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \frac{2h\nu_2}{c} + m_0\cdot c\cdot\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}$$ troviamo ν_2

$$\Rightarrow \frac{m_0\cdot c}{\left(\frac{2h\nu_1}{m_0\cdot c^2} + \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\right)} + \frac{2h\nu_2}{c} = m_0\cdot c\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

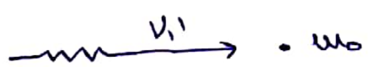
$$\Rightarrow \frac{2h\nu_2}{c} = m_0\cdot c\left(\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - \frac{1}{\frac{2h\nu_1}{m_0 c^2} + \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}}\right)$$

$\Rightarrow$ si trova ν_2

Altra soluzione: effetto Compton



In Σ':



$$\nu_1' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,\nu_1$$

$$\hat{\lambda} = \lambda + \lambda_c (1 - \cos(\varphi))$$

$$\hat{\lambda}' = \lambda' + 2\lambda_c$$

$$\frac{c}{\nu_2'} = \frac{c}{\nu_1'} + 2\lambda_c \longrightarrow \nu_2'$$

$$\nu_2 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\ \nu_2'$$

PROBLEMI VARI

10 GENNAIO 2012

② Un corpo puntiforme A di massa a riposo nota M_1 con velocità iniziale nota $u = (u, 0, 0)$ assorbe all'istante t_0 un fotone e si ferma.

ⓐ determinare l'energia del fotone e la massa a riposo M_2 dell'unico corpo B risultante dall'urto.

All'istante $t_1 > t_0$ il corpo B decade in due corpi C e D;
il corpo C ha massa a riposo M_1 e velocità $V_C = \left(\frac{1}{2}u, \frac{\sqrt{3}}{2}u, 0\right)$

ⓑ determinare la massa a riposo m_0 e la velocità V_D del corpo D.

Soluzione

A $\quad \vec{u} = (u, 0, 0)$ $\quad M_1 \quad \xleftarrow{\ \nu\ }$ $\quad\Big|\quad$ B $\quad \vec{w} = 0$ $\quad$ B si ferma dopo il processo

ⓐ **Energia del fotone**

$E_\gamma = h \cdot \nu$ $\quad$ dobbiamo determinare la frequenza e per fare ciò dobbiamo sfruttare la conservazione del quadrimomento.

Allora:

Prima del processo, il quadrimomento è quello della particella e del fotone.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{m_0 \cdot c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \dfrac{h\nu}{c} \\[2ex] \dfrac{m_0 \cdot u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \dfrac{h\nu}{c} m_x \\[2ex] 0 + \dfrac{h\nu}{c} m_y \\[2ex] 0 + \dfrac{h\nu}{c} m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \cdot c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dopo il processo abbiamo solo la particella B che si ferma (la vel. è 0 quindi la parte temporale del quadrimomento è solo $M_1 \cdot c$).
La parte spaziale è 0.

Allora: $n_y = n_z = 0$

$\Rightarrow$ il fotone viaggia sull'asse x

Allora $n_x = \pm 1$

$$\underbrace{\pm \frac{h\nu}{c}}_{\vec{u}_x} + \frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_x \frac{h\nu}{c} = -\frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad n_x = -1$$

← componente x del quadrimomento del fotone

Questo risultato si sostituisce nella 1ª eq. e si ottiene:

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \nu = \frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdot \frac{c}{h}$$

Allora $E_g = h\nu = c \cdot \frac{m_0 \cdot u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

Inoltre:

$$\frac{m_0 \cdot c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{h\nu}{c} = M_1 \cdot c$$

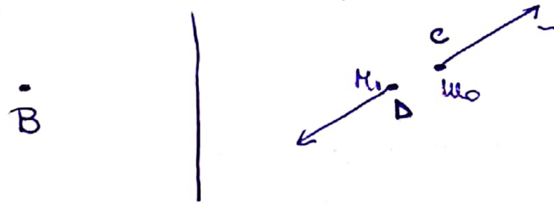
(otteniamo la massa M_1 dalla 1ª equazione)

$$\Rightarrow M_1 = \frac{1}{c}\left(\frac{m_0 \cdot c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{h\nu}{c}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{m_0 \cdot c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) =$$

$$= m_0 \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}$$

massa del punto B (è cresciuta perché ha assorbito l'energia del fotone)

(b) (Ho invertito C e D)



$V_D = \left(\frac{1}{2}u, \frac{\sqrt{3}}{2}u, 0\right)$

$V_D^2 = \frac{1}{4}u^2 + \frac{3}{4}u^2 + 0 = u^2$

$m_0 = ?$

$V_C = ?$

Anche qui dobbiamo applicare la conservazione del quadrimomento

$\underline{P = Q}$

$\cancel{M_1 \cdot c}$

$$\cancel{\frac{m_0 c}{\sqrt{1-w^2/c^2}} + \frac{M_1 c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$$

$$\cancel{\frac{m_0 \cdot w_x}{\sqrt{1-w^2/c^2}} + M_1 \cdot}$$

Si parte dalla situazione di B che è fermo, quindi il quadrimomento è semplice. Dopo il processo, invece, ci sono due corpi: il corpo D di cui conosciamo la massa M_1 e il corpo C (del quale non conosciamo né massa né velocità):

$$\begin{bmatrix} m_1 \cdot c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{M_1 \cdot c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ \dfrac{M_1 \cdot \frac{1}{2} u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ \dfrac{M_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{m_0 c}{\sqrt{1-w^2/c^2}} \\ \dfrac{m_0 \cdot w_x}{\sqrt{1-w^2/c^2}} \\ \dfrac{m_0 \cdot w_y}{\sqrt{1-w^2/c^2}} \\ \dfrac{m_0 \cdot w_z}{\sqrt{1-w^2/c^2}} \end{bmatrix}$$

Possiamo determinare il rapporto m_0 sulla radice: (m_1 nota)

$$\underbrace{\frac{m_0 \cancel{c}}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}} = -\frac{M_1 \cancel{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + m_1 \cancel{c} = -\frac{M_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + m_1 \quad (*)$$

Se sostituiamo questo rapporto nella 2a equazione, otteniamo:

$$\frac{m_0 \, w_x}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}} = -\frac{M_1 \frac{1}{2} u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Sostituiamo (*) e otteniamo:

$$\left(m_1 - \frac{M_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) w_x = -\frac{M_1 \frac{1}{2} u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1 \sqrt{1-u^2/c^2} - M_1}{\cancel{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}} w_x = -\frac{M_1 \frac{1}{2} u}{\cancel{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$$

$$\underline{w_x} = -\frac{M_1 \frac{1}{2} u}{m_1 \sqrt{1-u^2/c^2} - M_1}$$

Allo stesso modo si può ottenere la velocità w_y:

$$\frac{m_0 w_y}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}} = -\frac{M_1 \frac{\sqrt{3}}{2} u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \left(m_1 - \frac{M_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right) w_y = - \frac{M_1 \frac{\sqrt{3}}{2} u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \underline{w_y} = - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} M_1 \cdot u}{m_1 \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - M_1}$$

$$\boxed{w_z = 0}$$

QUANDO SI CHIEDE IL VALORE DI UN GRANDEZZA, SI CHIEDE DI ESPRIMERE QUEST'ULTIMA IN RELAZIONE DI GRANDEZZE GIA' NOTE.

$$\vec{w} = \left(-\frac{\frac{1}{2} M_1 u}{m_1 \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - M_1} \, , \, -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} M_1 u}{m_1 \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - M_1} \, , \, 0 \right)$$

16 SETTEMBRE 2013

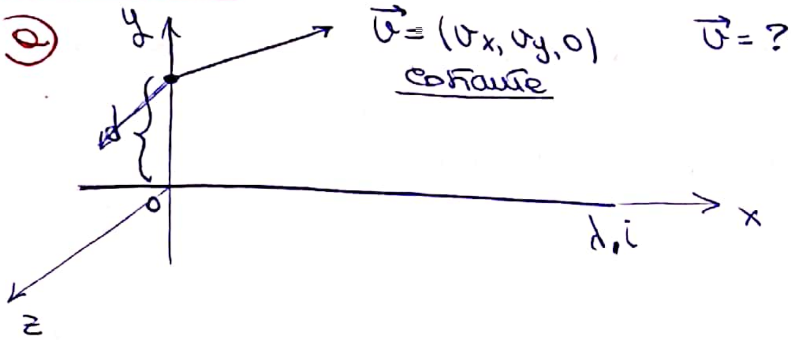
3) Un filo rettilineo giacente sull'asse x è dotato di densità di carica uniforme λ e corrente elettrica costante i. All'istante $t=0$ un elettrone si trova nel punto $(0,d,0)$ e si muove con velocità costante $v=(v_x,v_y,0)$.

a) Determinare v.

b) Trovare la corrente i' rispetto ad un sistema di riferimento che si muove con velocità costante $(u,0,0)$.

Soluzione

a)



$\vec{v}=?$

Per risolvere il problema dobbiamo esprimere le velocità in funzione di λ, i, d.
Come si fa a determinare la v? Quello che sappiamo è che è costante e se è costante vuol dire che non c'è accelerazione.
Dall'equazione del moto abbiamo che le accelerazioni sono nulle.

$\vec{a}=0 \Rightarrow$ Dalle equazioni del moto otteniamo che la forza di Lorentz deve essere nulla $\vec{F}=\vec{0}$.

La forza di Lorentz ha 3 componenti:

$F_x = \cancel{eE_x} + \underbrace{e(v_y B_z - \cancel{v_z B_y})}=0$ la componente x della parte magnetica

$F_y = eE_y + e(\cancel{v_z B_x} - v_x B_z) = 0$

$F_z = \cancel{eE_z} + e(\cancel{v_x B_y} - \cancel{v_y B_x}) = 0$

Il corpo si trova sul punto d dell'asse y. Sappiamo che il campo elettrico generato da un filo rettilineo è radiale, quindi nel punto d avrà solo componente y:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}$$ (le altre due componenti sono nulle)

Il campo magnetico prodotto da un filo rettilineo è tangente in ogni punto alla circonferenza che ha come asse il filo

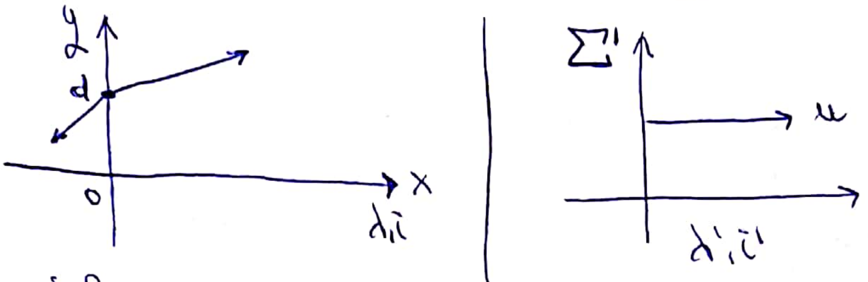
$$B_z = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$ (le altre due componenti sono nulle)

Dalla prima eq. otteniamo che $v_y=0$, perchè $B_z \neq 0$.

$\boxed{c=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}}$

Dalla 2ª: $v_x = \frac{E_y}{B_z} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cancel{d}} \cdot \frac{\cancel{2\pi d}}{\mu_0 i} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0\mu_0 i} = \frac{\lambda}{i}\cdot c^2$

(b)



Come si fa a determinare la corrente?
Se sapessimo che la corrente i è il risultato di un moto del filo, allora $i = \lambda \cdot 6$ ($\lambda \cdot$ velocità del filo), però non lo sappiamo.
Una possibilità è quella di sfruttare le trasformazioni del campo elettromagnetico, perché la corrente i' in Σ' genererà un campo magnetico come lo genera la corrente i in Σ, ma questa volta il campo magnetico sarà sempre nel punto corrispondente a quello in Σ e avrà solo la componente B_z' =

$$B_z' = \frac{\mu_0 i'}{2\pi d'}$$

Se conoscessimo il campo magnetico, potremmo ricavare i da questa equazione.
Come facciamo a determinare il campo magnetico?

$$B_z = \frac{\mu_0 i}{2\pi i} \quad \text{in } \Sigma$$

tempo

Questo punto ha coordinate $(0, 0, d, 0)$
Dalle regole di trasformazione:

$$B_z' = \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\frac{\mu_0 i}{2\pi d} - \frac{u}{c^2}\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 d}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Però questo è il campo nel punto corrispondente a $(0,0,d,0)$.
Qual è il punto corrispondente a questo in Σ'?
Dobbiamo fare le trasformazioni di Lorentz.

$$(0, 0, d, 0)$$

In questo caso particolare, il punto che consideriamo ha le stesse coordinate in Σ'.
Quindi:

$$\frac{\mu_0 i - \frac{u}{c^2}\lambda}{\cancel{2\pi d}\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\mu_0 i'}{\cancel{2\pi d}} \Rightarrow i' = \frac{\left(\mu_0 i - \frac{u}{c^2}\lambda\right)}{\mu_0}$$

21/02/2020

(2) Un corpo puntiforme A ha massa a riposo m_0 nota ed è inizialmente fermo, ossia $\vec{v}(0)=\vec{0}$.
Ad un certo punto, emette: un fotone di frequenza ν nota e un corpo B di massa m_1 (nel verso opposto al fotone) e velocità $\vec{v}_B = -\vec{v}_{fotone}$.
Inoltre dopo l'emissione è presente anche un corpo C con massa m_2 nota.
(1) dimostrare che $m_0 > m_2$, $|\vec{v}_B|$ e m_1.

Soluzione

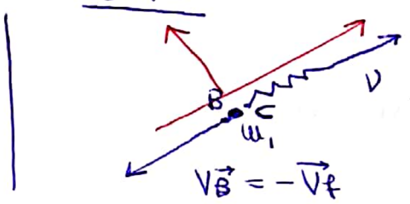
La 1ª cosa da fare è chiarire qual è il processo.

PRIMA

A

$\vec{v}_A = 0$

DOPO



$\vec{V_C} = \vec{0}$ m_2 nota

Dopo il processo sono presenti 3 corpi.

Trattandosi di un sistema isolato, le relazioni che posso usare per risolvere il problema sono quelle della conservazione del quadrimomento:

$$\underline{P} = \underline{Q}$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} m_0 \cdot c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{P}_B + \underline{\Pi}^f + \underline{P}_C = \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 \cdot c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ -\dfrac{m\, V_B}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{h\nu}{c} \\ \dfrac{h\nu}{c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 \cdot c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$(V_B \geq 0)$

quadrimomento del fotone

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 \cdot c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \dfrac{h\nu}{c} + m_2 \cdot c \\ -\dfrac{m\, V_B}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}} + \dfrac{h\nu}{c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c = velocità della luce

(2) $$m_0 \cdot c = m_2 c + \boxed{\frac{h\nu}{c} + \frac{m_1 c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \ (*)$$

Dato che (*) sono entrambi >0
$\Rightarrow m_0 c > m_2 c$

b) Se sottraiamo la 1ª e la 2ª equazione, otteniamo:

$$m_0 \cdot c - 0 = \frac{m_1 (c+v_B)}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}} + m_2 \cdot c$$

$$\underset{\substack{\vee\\ 0}}{(m_0 - m_1)} c = m_1 c \sqrt{\frac{c+v_B}{c-v_B}} = (m_0 - m_2) c$$

Sommando, invece, le due equazioni otteniamo:

$$m_0 \cdot c = \frac{m_1 (c-v_B)}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}} + \frac{2h\nu}{c} + m_2 c$$

$$m_1 \sqrt{\frac{c-v_B}{c+v_B}} + \frac{2h\nu}{c} + m_2 \cdot c = m_0 \cdot c$$

Le nostre 2 eq. sono:

$$(-)\quad m_1 c \sqrt{\frac{c+v_B}{c-v_B}} = (m_0 - m_2) c$$

$$(+)\quad m_1 c \sqrt{\frac{c-v_B}{c+v_B}} + \frac{2h\nu}{c} = (m_0 - m_2) c$$

$$\Rightarrow \quad m_1 c \sqrt{\frac{c+v_B}{c-v_B}} = m_1 c \sqrt{\frac{c-v_B}{c+v_B}} + \frac{2h\nu}{c}$$

$$m_1 c \underbrace{\left(\sqrt{\frac{c+v_B}{c-v_B}} - \sqrt{\frac{c-v_B}{c+v_B}} \right)}_{(*)} = \frac{2h\nu}{c}$$

Da questa eq. posso ottenere $m_1 \cdot c$ dividendo per $(*)$, sostituisco nella eq. $(-)$ e trovo così m_1

Dalla $(+)$ posso sapere:

$$m_1 c \sqrt{\frac{c+v_B}{c-v_B}} \; \frac{c-v_B}{c+v_B} = (m_0 - m_2) c - \frac{2h\nu}{c}$$

$$\cancel{(m_0 - m_2) \cdot c \; \frac{c-v_B}{c+v_B} = (m_0 - m_2) c}$$

$$\cancel{(m_0 - m_2) c \left(\frac{c - v_B}{c + v_B}\right) = (m_0 - m_2) c - \frac{2hv}{c}}$$

$$(m_0 - m_2) c \left(\frac{c - v_B}{c + v_B}\right) = (\cancel{m_0 - m_2}) c - \frac{2hv}{c}$$

$$\frac{c - v_B}{c + v_B} = \frac{1 - \frac{2hv}{c}}{(m_0 - m_2) c}$$

Sostituendo, ad esempio, nella (-) troviamo v_B.

29/01/2016

② Abbiamo un corpo puntiforme inizialmente fermo, $\vec{v}=0$, e con massa a riposo m_0 (nota). Esso emette un fotone con velocità $(-c,0,0)$, ν nota; il corpo avrà una nuova velocità $\vec{u}$ e una nuova massa m_1.

③ Determinare m_1 e $\vec{u}$

Sfruttiamo la conservazione del quadrimomento:

$$\begin{bmatrix} m_0 \cdot c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 \cdot c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \dfrac{h\nu}{c} \\ \dfrac{m_1 \cdot u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \dfrac{h\nu}{c} \\ \dfrac{m_1 \cdot u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + 0 \\ \dfrac{m_1 \cdot u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + 0 \end{bmatrix}$$

Dalla III e IV eq. otteniamo che $u_y = u_z = 0$

$$\Rightarrow u^2 = u_x^2$$

$$m_0 \cdot c = \frac{m_1 \cdot c}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} + \frac{h\nu}{c}$$

$$0 = \frac{m_1 \cdot u_x}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} - \frac{h\nu}{c} \Rightarrow \frac{m_1 u_x}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} = \frac{h\nu}{c} \quad (*)$$

Sostituendo $(*)$ nella 1ª eq. otteniamo:

$$m_0 \cdot c = \frac{m_1 \cdot c}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} + \frac{m_1 u_x}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} = m_1 c \sqrt{\frac{c-u_x}{c+u_x}}$$

Ora, dalla 1ª eq. otteniamo:

$$\frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} = \frac{1}{c}\left(m_0 c - \frac{h\nu}{c}\right) \quad (\star)$$

Sostituiamo nella 2ª eq.:

$$\frac{1}{c}\left(m_0 \cdot c - \frac{h\nu}{c}\right) u_x - \frac{h\nu}{c} = 0$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{h\nu/c}{m_0 c - \frac{h\nu}{c}}\, c$$

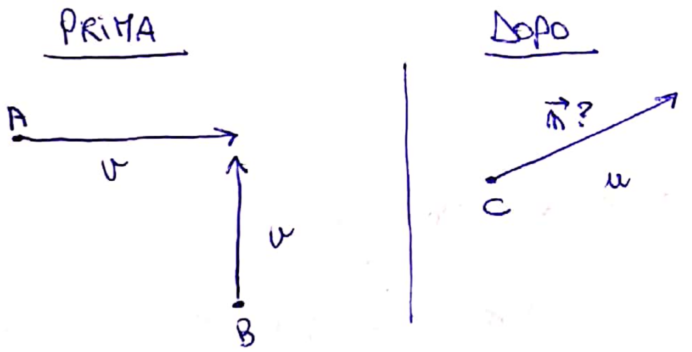
Ora, sostituendo u_x nelle (★), otteniamo u,.

$$\vec{u} = \left(\frac{\frac{h\nu}{c}}{m_0 c - \frac{h\nu}{c}}\, c,\ 0,\ 0 \right)$$

$\boxed{04/11/2015}$

② Abbiamo un corpo puntiforme, con massa m_0 e velocità $\vec{v}_A=(v,0,0)$. Ad un certo punto, avviene una collisione con un corpo, che ha massa a riposo m_0 e $\vec{v}_B=(0,v,0)$.
Dopo la collisione c'è un solo corpo con massa a riposo M_0 e vel. $\vec{u}\,(?,?,0)=u$.

ⓐ Determinare il versore $\vec{n}$ della velocità.



Sfruttiamo la conservazione del quadrimomento:

perché A e B hanno lo stesso modulo della velocità

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2\, m_0 c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + 0 \\ 0 + \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{M_0 \cdot c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ \dfrac{M_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ \dfrac{M_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{M_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{M_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\, n_x =$$

$$\frac{M_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{M_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\, n_y$$

$\Rightarrow m_x = m_y$ e siccome $m_z = 0$ $\Rightarrow \vec{m} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ (*)

Questo vuol dire che il corpo C viaggia sulla bisettrice.

b) Determinare $M_0(v)$.

Dalla 1ª eq. otteniamo:

$$\frac{M_0}{\sqrt{1-U^2/c^2}} = \frac{2m_0}{\sqrt{1-U^2/c^2}} \quad (*)$$

, che può essere sostituita indifferentemente nella 2ª o nella 3ª.

La sostituisco nella 2ª.

$$\frac{m_0 v}{\cancel{\sqrt{1-v^2/c^2}}} = \frac{M_0}{\sqrt{2}\sqrt{1-U^2/c^2}} u = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2m_0}{\cancel{\sqrt{1-U^2/c^2}}} u$$

$$\Rightarrow u = \frac{v \cdot \sqrt{2}}{2} \simeq 0.7 v$$ sostituisco in (*)

$$\Rightarrow M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \sqrt{1-U^2/c^2} = 2m_0 \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}v^2/c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

(*) Essendo un versore, il modulo deve essere uguale a 1. Essendo che $m_z = 0$, non c'è la componente z e quindi rimangono solo x e y.

Questo vuol dire che:

$m_x^2 + m_y^2 = 1$ ma essendo che $m_x = m_y$

$2m_x^2 = 1 \Rightarrow m_x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow m_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (che può essere negativo o positivo)

04/11/2013

(4) (Meccanica Analitica)

Una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 è istantaneamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\Phi=0$ e $A=(-E_0 t, 0, B_0 y)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.

b) L'hamiltoniana è una costante del moto?

c) Se la carica è inizialmente ferma nel punto (0,0,0,0), determinarne la velocità quando occupa la posizione $(x_0,0,0)$.

d) Trasformare i potenziali in maniera tale che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.

Soluzione

a) La lagrangiana non covariante è sempre data da:

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e(\Phi - \vec{v}\cdot\vec{A}) =$$

$$= -m_0 c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e(-E_0 v_x t + B_0 v_z y)$$

La hamiltoniana, se la scriviamo rispetto alle variabili lagrangiane è semplice:

$$h = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\Phi = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

La scrivo rispetto alle variabili lagrangiane perché nei problemi pratici quello che conta è l'hamiltoniana in funzione delle variabili lagrangiane.

b) In meccanica analitica abbiamo dimostrato il seguente teorema:

"h è costante se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}=0$".

Nel nostro caso:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -eE_0 v_x \neq 0 \implies h \text{ non è una costante}$$

c) $\vec{x}(0)=\vec{0}$, $\vec{v}(0)=\vec{0}$, $\vec{v}(t)=?$ se $\vec{x}(t)=(x_0,0,0)$

Questo quesito si potrebbe rispondere se h fosse costante, perché in quel caso il valore di h all'istante $t=0$ dovrebbe essere:

$$h_{t=0} = h_t$$

E quindo avremo che:

$$h = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Ma è assurda nel nostro caso, perché h non è costante.
Però, attenzione, il nostro potenziale è $\vec{A} = (-E_0 t, 0, B_0 y)$ e $\mathcal{L}$ dipende dal tempo proprio a causa di "$-E_0 t$".
L'idea che può risolvere il quesito è: "Si può cambiare potenziale con uno equivalente, cioè con uno che determina gli stessi campi?" (con una trasformazione tale che la lagrangiana risulti indipendente dal tempo e quindi h sia costante in maniera tale da utilizzare l'equazione scritta sopra).
Non cambiamo la fisica (perché abbiamo sempre le particelle nello stesso campo elettromagnetico), ma cambiamo potenziale e lo dobbiamo scegliere in maniera tale che non dipenda dal tempo.

Partiamo dal campo.
Il campo magnetico e il campo elettrico sono (rispettivamente), come al solito, il rotore di A e il gradiente di Φ - la derivata di A rispetto al tempo:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad e \quad \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}, -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}, -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}\right) =$$

$$= (E_0, 0, 0) \longleftarrow \text{campo elettrico uniforme}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\underbrace{\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}}_{-B_0}, \underbrace{\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}}_{0}, \underbrace{\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}}_{0}\right) =$$

$$= (+B_0, 0, 0) \longleftarrow \text{campo magnetico uniforme lungo x}$$

Si possono ottenere gli stessi campi scegliendo potenziali diversi.

$$\vec{A} = (0, 0, B_0 y) \xrightarrow[\text{otteniamo sempre}]{\text{con questo potenziale}} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = (B_0, 0, 0)$$

quindi possiamo scegliere questo potenziale al posto di quello iniziale

$$\vec{E} = (E_0, 0, 0) = -\nabla\Phi - \partial \vec{A}/\partial t \longrightarrow$$ Ma il nuovo A non dipende dal tempo.

Quindi per determinare il potenziale scalare basta la seguente equazione:

$$\vec{E}(E_0, 0, 0) = -\nabla\Phi$$

Siccome il campo elettrico deve avere solo la componente x scegliamo

$\Phi = -E_0 x$

$$\Rightarrow -\nabla\Phi = (E_0, 0, 0)$$

Consideriamo i nuovi potenziali: $\Phi = -E_0 x$ e $\vec{A} = (0, 0, By)$.

La fisica rimane la stessa, solo che la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e(-E_0 x - B_0 v_z y)$$

e:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h \text{ è costante}$$

$$h = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\Phi = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - e E_0 x$$

Dato che h adesso è costante, possiamo sfruttare il teorema scritto sopra:

$$h_{t=0} = h_t$$

$$\Rightarrow m_0 \cdot c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e E_0 x_0$$ l'unica incognita è la velocità.

$$\Rightarrow \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 \cdot c^2 - e E_0 x_0$$ e da questa ricavare v.

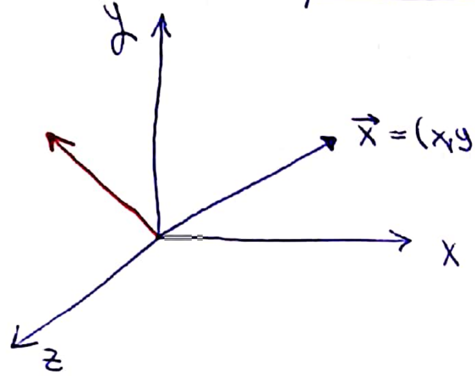
29/01/2016

(3) In un sistema di riferimento Σ, il campo elettromagnetico è dato da:

$$\vec{E} = \frac{a}{y^2+z^2}(0,y,z)$$

a e b costanti

$$\vec{B} = \frac{b}{y^2+z^2}(0,z,-y)$$



Possiamo riscrivere $\vec{E}$ come:

$$\vec{E} = a\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} \frac{(0,y,z)}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad \vec{n}$$

$$= \frac{a}{d}\cdot\vec{n}$$

e B come:

$$\vec{B} = \frac{b}{\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{(0,z,-y)}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

(2) Determinare la velocità $\vec{v}_0$ di un sistema di riferimento Σ' rispetto a Σ nel quale il campo magnetico $\vec{B}' = \vec{0}$.

Bisogna vedere qual è il sistema di riferimento Σ' rispetto al quale il campo magnetico è nullo.
Il campo magnetico lungo x è già nullo: $B_x = 0$.
Se considerassimo come Σ' un sistema che si muove lungo x, allora sappiamo che in questo caso $B_x' = B_x = 0$
Dobbiamo trovare il sistema rispetto al quale tutte le componenti (del campo magnetico) sono nulle.

$$B_y' = \frac{B_y + \frac{v_0}{c^2}E_z}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}, \qquad B_z' = \frac{B_z + \frac{v_0}{c^2}E_y}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{\frac{b}{y^2+z^2}z + \frac{v_0}{c^2}\frac{a}{y^2+z^2}z}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = 0$$

$$= \frac{bz + [(v_0 a)/c^2]z}{(y^2+z^2)\sqrt{1-v_0^2/c^2}} = \frac{\left(b + \frac{a v_0}{c^2}\right)z}{(y^2+z^2)\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\, z = 0 \quad \forall z$$

E' chiaro che la condizione è:

$$v_0 = -\frac{b}{a}c^2$$

Vediamo se con questa condizione si annulla anche la componente z.

$$B_{z'} = \frac{B_z - \frac{v_0}{c^2}E_y}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{\left(\frac{-by}{y^2+z^2} - \frac{\frac{v_0}{c^2}ay}{y^2+z^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} =$$

$$= -\frac{y(b+av_0/c^2)}{(y^2+z^2)\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = -\frac{y}{(y^2+z^2)\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$$

$$\cdot\left(b - \frac{\cancel{a}}{\cancel{c^2}}\frac{b}{\cancel{a}}\cancel{c^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow B_{z'} = 0$$

$$\boxed{\vec{v}_0 = \left(-\frac{b}{a}c^2, 0, 0\right)}$$

b) Dimostrare che l'hamiltoniana di una carica e, con massa a riposo m_0, lentamente accelerata da questo campo, è una costante del moto sia in Σ che in Σ'.

$$\boxed{h = \text{cost se } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0}$$

Dobbiamo calcolare $\mathcal{L}$ sia in Σ che in Σ' e vedere se la condizione è soddisfatta.

Iniziamo da Σ:

$$\mathcal{L} = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\left(\Phi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right)$$

Dobbiamo trovare Φ e A, quindi ci dobbiamo affidare alle relazioni che legano i campi ai potenziali:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} \quad e \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$$

Dobbiamo determinare (A_x, A_y, A_z).

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0$$

A_z potrebbe essere una qualunque funzione di x e z e A_y potrebbe essere una qualunque funzione di x e y.

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = b\frac{z}{y^2+z^2}$$

A_x dovrebbe essere una funzione che derivata manda al denominatore y^2+z^2. Un'idea sarebbe metterci un ln:

$$A_x = d \ln(y^2+z^2)$$

costante da determinare

Una possibilità è quella di scegliere:

$$A_x = \frac{b}{2}\ln(y^2+z^2) \quad , A_z(y,z) \quad (*)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = d\frac{2z}{y^2+z^2} \Rightarrow 2d = b \Rightarrow d = \frac{b}{2}$$

(*)

$A_z(y,z) \rightarrow$ A_z funzione di y e di z

$A_z(x,z)$

$A_z(z)$ E quindi A_z deve essere una funzione solo di z

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} =$$

A_x è dato

$$= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{by}{y^2+z^2} = -\frac{by}{y^2+z^2}$$

$A_z = 0 = A_y$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}$$ potenziale vettore

$\vec{A}$ si può scegliere come: $\vec{A} = \left(\frac{b}{2}\ln(y^2+z^2), 0, 0\right)$

Dobbiamo determinare ora il potenziale scalare e lo determiniamo dalla condizione:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \cancel{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$ ← Non dipende dal tempo

CONVIENE SEMPRE INIZIARE DAL POTENZIALE VETTORE, PERCHÉ IL LEGAME TRA POTENZIALE VETTORE E CAMPO MAGNETICO È DIRETTO, MENTRE QUELLO TRA CAMPO ELETTRICO E POTENZIALE COINVOLGE TUTTI E DUE I POTENZIALI.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \cancel{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} = -\vec{\nabla}\Phi$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \; ; \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = a\frac{y}{y^2+z^2} \; ; \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{az}{y^2+z^2}$$

$$\Phi = \frac{a}{2}\ln(y^2+z^2)$$

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\left(-\frac{a}{2}\ln(y^2+z^2) - \vec{v}\cdot\left(\frac{b}{2}\ln(y^2+z^2),0,0\right)\right)$$

Non dipende esplicitamente dal tempo, quindi $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ e quindi h è costante.

Questo per quanto riguarda Σ.

Per quanto riguarda Σ'. Innanzitutto dobbiamo vedere quanto vale (il potenziale in) Σ'.

Siccome conosciamo il potenziale in Σ, in Σ':

$$\underline{A}' = \Lambda\,\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} & +\frac{v_0/c}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ +\frac{v_0/c}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} & +\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$
lambda
→ trasformazione Lorentz canonica con vel. $-v_0$

Questa va applicata al quadripotenziale in Σ:

$$\begin{bmatrix} -\frac{a}{2}\frac{\ln(y^2+z^2)}{c} = A_0 = \frac{\Phi}{c} \\ \frac{b}{2}\ln(y^2+z^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Facendo:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} + \frac{\frac{v_0}{c}}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{v_0/c}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 \quad\quad 0 & 1 & 0 \\ 0 \quad\quad 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{a}{2}\frac{\ln(y^2+z^2)}{c} = A_0 = \frac{\varphi}{c} \\ \frac{b}{2}\ln(y^2+z^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

Moltiplicando la matrice lambda per il quadripotenziale troviamo ovviamente il quadripotenziale rispetto a Σ'!

$$\frac{-\frac{a}{2}\ln(y^2+z^2) + v_0/c \cdot \frac{b}{2}\ln(y^2+z^2)}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$$

non dipende da t'

$$y = y'$$
$$z = z'$$

$\Rightarrow$ Anche in Σ' l'hamiltoniana sarà costante.

26/01/2016 ③

In un sistema di riferimento Σ i campi elettrico e magnetico sono:

$$\vec{E} = \frac{a}{y^2+z^2}(0, y, z) \qquad \vec{B} = \frac{b}{y^2+z^2}(0, z, -y)$$

ⓐ Determinare la velocità $\vec{v}_0$ rispetto a Σ di un sistema di riferimento Σ' nel quale il campo magnetico $\vec{B}$ è identicamente nullo.

ⓑ Dimostrare che l'hamiltoniana di una carica e con massa a riposo m_0, lentamente accelerata dal campo è una costante del moto tanto in Σ che in Σ'.

ⓒ Se la carica del punto ⓑ ha, rispetto a Σ', velocità iniziale nulla e posizione $\vec{x}(0) = (0, y_0', 0)$, determinare $\vec{v}'$ quando arriva al punto $\vec{X}' = (0, y', 0)$.

Soluzione

ⓐ $\vec{E} = \frac{a}{y^2+z^2}(0, y, z)$; $\vec{B} = \frac{b}{y^2+z^2}(0, z, -y)$; $B' = (0,0,0)$

Ricavo E' e B' dalle trasformazioni dei campi.
Se Σ' è un sistema in moto lungo x, allora $B'_x = B_x = 0$.
Affinché B_y' e B_z' siano nulle, deve accadere che:

$$B_y' = \frac{B_y + \frac{v_0}{c^2} E_z}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = 0 \quad \text{e} \quad B_z' = \frac{B_z - \frac{v_0}{c^2} E_y}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = 0$$

Vediamo per B_y':

$$\frac{\frac{bz}{y^2+z^2} + \frac{v_0}{c^2} \cdot \frac{az}{y^2+z^2}}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = 0 \implies bz + a\frac{v_0}{c^2}z = 0$$

$$\implies \boxed{v_0 = -\frac{bc^2}{a}}$$

$\longrightarrow$ Con $v_0 = -\frac{bc^2}{a}$ si ha che Σ' è canonicamente correlato a Σ con velocità lungo x.

Resta da verificare se tale valore annulla B_z.

$$\frac{-\frac{by}{y^2+z^2} - \frac{v_0}{c^2}\frac{ay}{y^2+z^2}}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = -\frac{bc^2}{a}$$

si ottiene la stessa condizione, allora $\vec{v_0} = \left(-\frac{bc^2}{a}, 0, 0\right)$.

b) Sappiamo che ~~h~~ $h = \text{cost} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$.
Calcoliamo $\mathcal{L}$ in Σ e $\mathcal{L}'$ in Σ'.

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\left(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right) \leftarrow$$

dobbiamo ricavare ϕ e $\vec{A}$ conoscendo i campi

$$(B_x, B_y, B_z) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\begin{cases} \partial A_z/\partial y = \partial A_y/\partial z \Rightarrow A_z = A_z(x, z), \quad A_y = A_y(x, y) \\ \frac{bz}{y^2+z^2} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \Rightarrow A_z = A_z(y,z) \\ -\frac{by}{y^2+z^2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases}$$

$A_z = A_z(z)$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial A_x}{\partial z} dz = A_x = \int \frac{bz}{y^2+z^2} dz = \frac{b}{2}\log(y^2+z^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{by}{y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial A_y}{\partial x} = 0 \qquad \vec{A} = \left(\frac{b}{2}\log(y^2+z^2), 0, 0\right)$$

$$(E_x, E_y, E_z) = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}, -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}, -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}\right)$$

$$\begin{cases} \partial\phi/\partial x = -\cancel{\partial A_x/\partial t} \\ \frac{ay}{y^2+z^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial A_y}{\partial t}} \\ \frac{az}{y^2+z^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial A_z}{\partial t}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \phi = \phi(y,z) \\ -\partial\phi/\partial y = \frac{ay}{y^2+z^2} \overset{\text{integro}}{\Rightarrow} \phi = -\frac{a}{2}\log(y^2+ \\ -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{az}{y^2+z^2} \end{cases}$$

$\vec{E} = \frac{a}{y^2+z^2}(0, y, z)$ $\vec{B} = \frac{b}{y^2+z^2}(0, z, -y)$

$\vec{B}' = \vec{0}$ $\vec{v}_0$ di Σ' rispetto a Σ